
LÖSUNGEN ZU
KONRAD KÖNIGSBERGER: ANALYSIS I

— KAPITEL 4 —

TIM KOPISCHKE
DEZEMBER 2020

Aufgabe 1 : ✓
Aufgabe 2 : ✓
Aufgabe 3 : ✓
Aufgabe 4 : ✓

Aufgabe 5 : ✓
Aufgabe 6 : ✓
Aufgabe 7 : ✓
Aufgabe 8 : ✓

Aufgabe 9 : ✓
Aufgabe 10 : ✓
Aufgabe 11 : ✓
Aufgabe 12 : ✓

Aufgabe 1

Aus $x_1 < x_2$ folgt, dass $[x_1] \leq [x_2]$. Andererseits gilt $x_1 - [x_1] < x_2 - [x_2]$ nach Vergleich der Nachkommastellen von x_1 und x_2 . Damit gilt auch $\sqrt{x_1 - [x_1]} < \sqrt{x_2 - [x_2]}$ und insgesamt somit

$$[x_1] + \sqrt{x_1 - [x_1]} < [x_2] + \sqrt{x_2 - [x_2]} \quad (1)$$

Also folgt aus $x_1 < x_2$ für beliebige $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$, dass $f(x_1) < f(x_2)$, also die strenge Monotonie der Funktion. ■

Aufgabe 2

(a). Für $A = \mathbb{Z}$ ist

$$d_A(z) = \inf_{a \in \mathbb{Z}} |z - a| = \inf_{a \in \mathbb{Z}} |x - a + iy| = \inf_{a \in \mathbb{Z}} \sqrt{(x - a)^2 + y^2} = \sqrt{(\inf_{a \in \mathbb{Z}} \{x - a\})^2 + y^2} \quad (2)$$

Für $x \in \mathbb{Z}$ ist dies klarerweise $|y|$. Für $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$ gibt es ein $a \in \mathbb{Z}$ so, dass $a + 1 > x > a$, nämlich $a = [x]$. Für $x > \frac{3}{2}a$ ist $x - [x] + 1 < x - [x]$ und umgekehrt für $x < \frac{3}{2}a$. Der minimale Abstand zwischen x und $a \in \mathbb{Z}$ ist also $\min\{x - [x], x - [x] + 1\}$. Damit also

$$d_A(z) = \sqrt{(\inf_{a \in \mathbb{Z}} \{x - a\})^2 + y^2} = \sqrt{(\min\{x - [x], x - [x] + 1\})^2 + y^2} \quad (3)$$

(b). Königsbergers Lösung (p. 366) ist bereits vollständig und umfangreich. ■

Aufgabe 3

Sei $f(x) := \sum_{k=0}^n a_k x^k$ das betrachtete Polynom. Dann gilt $f(x) = f(-x)$ wenn

$$\sum_{k=0}^n a_k x^k = \sum_{k=0}^n (-1)^k a_k x^k \quad (4)$$

und deshalb nach dem Identitätssatz für Polynome wenn

$$a_k = (-1)^k a_k \iff 1 = (-1)^k \iff k \equiv 0 \pmod{2} \quad (5)$$

Also gilt dann $a_{2k+1} = 0$ und $a_{2k} \neq 0$ für $k \in \{0, \dots, \frac{n}{2}\}$. Umgekehrt gilt $f(-x) = -f(x)$ wenn

$$\sum_{k=0}^n (-1)^k a_k x^k = \sum_{k=0}^n -a_k x^k \quad (6)$$

und wie oben also wenn

$$(-1)^k = -1 \iff (-1)^{k-1} = 1 \iff k \equiv 1 \pmod{2} \quad (7)$$

In dem Fall gilt dann $a_{2k+1} \neq 0$ und $a_{2k} = 0$ für $k \in \{0, \dots, \frac{n}{2}\}$.

Sei $\phi = g + u$ mit g gerade und u ungerade. Dann gilt

$$\begin{aligned}\phi(x) &= g(x) + u(x) \\ \phi(-x) &= g(-x) + u(-x) = g(x) - u(x)\end{aligned}$$

und deshalb $\phi(x) + \phi(-x) = 2g(x) \implies g(x) = \frac{1}{2}(\phi(x) + \phi(-x))$. Umgekehrt ist dann

$$u(x) = \phi(x) - g(x) = \phi(x) - \frac{1}{2}\phi(x) - \frac{1}{2}\phi(-x) = \frac{1}{2}(\phi(x) - \phi(-x)) \quad (8)$$

Seien u_1, u_2 ungerade und g_1, g_2 gerade. Definiere $U := u_1 + u_2$ und $G := g_1 + g_2$. Dann gilt, dass $U(-x) = u_1(-x) + u_2(-x) = -u_1(x) - u_2(x) = -(u_1(x) + u_2(x)) = -U(x)$ und $G(x) = G(-x)$. Somit sind Summen ungerader Funktionen ungerade und gerader Funktionen gerade. Außerdem gilt für eine Funktion h , dass $h(x) = h(-x) = -h(x) \iff 2h(x) = 0 \iff h(x) = 0$. Die einzige Funktion, die demnach gerade und ungerade ist, ist also die Nullfunktion.

Darauf aufbauend betrachte nun die Zerlegung von ϕ in zwei verschiedene gerade bzw. ungerade Funktionen, d.h. $\phi = g_1 + u_1 = g_2 + u_2$. Dann würde folgen, dass $g_1 - g_2 = u_2 - u_1$. Auf der linken Seite steht eine gerade Funktion, auf der rechten eine ungerade. Also ist die Funktion gerade und ungerade, mithin also die Nullfunktion. Somit ist $g_1 - g_2 = u_1 - u_2 = 0$, also $g_1 = g_2$ und $u_1 = u_2$. Das beweist die Eindeutigkeit der Zerlegung. ■

Aufgabe 4

" $\Leftarrow$ " : Wenn die Koeffizienten des Polynoms reell sind, sind die Werte von f qua den Körperaxiomen von $\mathbb{R}$, d.h. der Abgeschlossenheit unter Addition und Multiplikation, reell.

" $\Rightarrow$ " : Sei das Polynom $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ nun reellwertig. Dann gilt $f(x) \in \mathbb{R} \forall x \in \mathbb{R}$, also insbesondere $f(x) = \overline{f(x)} \forall x \in \mathbb{R}$. Nach den Gesetzen für die Konjugation auf Seite 22 muss dann aber

$$f(x) = \sum_{k=0}^n a_k x^k = \sum_{k=0}^n \overline{a_k} x^k = \sum_{k=0}^n \overline{a_k x^k} = \overline{\sum_{k=0}^n a_k x^k} = \overline{f(x)} \quad (9)$$

gelten. Gemäß dem Identitätssatz heißt das dann aber, dass $a_k = \overline{a_k}$. Also sind auch die Koeffizienten reell. ■

Aufgabe 5

Das Additionstheorem der Binomialkoeffizienten mit $u, v \in \mathbb{C}$ und $n \in \mathbb{N}_0$ besagt, dass

$$\sum_{k=0}^n \binom{u}{k} \binom{v}{n-k} = \binom{u+v}{n} \quad (10)$$

und damit folgt für $u = v = n$, dass

$$\binom{2n}{n} = \binom{n+n}{n} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \binom{n}{n-k} \quad (11)$$

und wegen $\binom{n}{n-k} = \binom{n}{k}$ die Behauptung. Diese mittleren Binomialkoeffizienten heißen auf Englisch "central binomial coefficients" und sind mit den Catalan-Zahlen C_n verknüpft durch die Vorschrift

$$C_n = \frac{1}{n+1} \binom{2n}{n} \quad (12)$$

Sie heißen mittlere Binomialkoeffizienten, da sie die Zahlen des Pascalschen Dreiecks sind, die genau in der Mitte liegen. ■

Aufgabe 6

Wir beweisen erst wie vorgeschlagen die Produktregel für die Ableitung. Das Argument hierfür stammt aus E. Artins "Algebra with Galois Theory" (p. 55). Es genügt die Aussage für $f(x) = x^n$ und $g(x) = x^m$ zu zeigen, da i. der allgemeine Fall eine Linearkombination von Potenzen sein wird und ii. die Aussage für Linearkombinationen gültig bleibt. Dann ist aber

$$(fg)' = (x^{n+m})' = (n+m)x^{n+m-1} = nx^{n+m-1} + mx^{n+m-1} = nx^{n-1}x^m + mx^{m-1}x^n = f'g + fg'$$

Die eigentliche Lösung der Aufgabe folgt dann aus der Darstellung von f mittels $f(x) = (x-\alpha)^k q(x)$ und der Anwendung der Produktregel auf die rechte Seite. Hier ist α die k -fache Nullstelle von f und q ein Polynom mit Grad um k kleiner als der Grad von f . ■

Aufgabe 7

Sei $R(z) := \frac{f(z)}{g(z)} = \frac{z^7+1}{z^5+z^3}$. Da $\deg f > \deg g$ muss vor der Partialbruchzerlegung eine Polynomdivision durchgeführt werden. Nach der Polynomdivision erhält man

$$\frac{z^7+1}{z^5+z^3} = z^2 - 1 + \frac{z^3+1}{z^5+z^3} = z^2 - 1 + \frac{z^3+1}{z^3(z^2+1)} \quad (13)$$

Für den letzten Term wird eine Partialbruchzerlegung durchgeführt mit dem reellen Ansatz

$$\frac{z^3+1}{z^3(z^2+1)} = \frac{a_1}{z} + \frac{a_2}{z^2} + \frac{a_3}{z^3} + \frac{a_4z+a_5}{z^2+1} \quad (14)$$

Eine Möglichkeit ist beide Seiten der Gleichung mit dem Nenner der linken Seite zu multiplizieren und dann spezielle Werte für z einzusetzen. Sodann erhält man ein lineares Gleichungssystem, das nach den Koeffizienten $a_1, \dots, a_5$ aufgelöst werden kann.

$$z = 0 : 1 = a_3$$

$$(I) \quad z = -1 : 0 = a_1 - a_2 + 1 - \frac{1}{2}a_5 + \frac{1}{2}a_4$$

$$(II) \quad z = 1 : 1 = a_1 + a_2 + 1 + \frac{1}{2}a_4 + \frac{1}{2}a_5$$

$$(III) \quad z = -2 : -12 = 20a_1 - 10a_2 + 16a_4 - 8a_5$$

$$(IV) \quad z = 2 : 4 = 20a_1 + 10a_2 + 16a_4 + 8a_5$$

Eine Addition der Gleichungen (I) und (II) ergibt

$$a_1 = \frac{-1 - a_4}{2} \quad (15)$$

und eine Subtraktion von (I) bzgl. (II)

$$a_2 = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}a_5 \quad (16)$$

Genauso führt eine Addition von (III) und (IV)

$$a_4 = -\frac{1}{4} - \frac{5}{4}a_1 \implies a_1 = \frac{-1 - (-\frac{1}{4} - \frac{5}{4}a_1)}{2} \implies a_1 = -1 \implies a_4 = 1 \quad (17)$$

Setzt man diese Werte für a_1 und a_4 in (III) ein erhält man

$$4 = -20 + 10a_2 + 16 + 8a_5 \implies a_2 = -\frac{4}{5}a_5 + \frac{4}{5} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}a_5 \implies a_5 = 1 \implies a_2 = 0 \quad (18)$$

Die vollständige Partialbruchzerlegung ist also

$$\frac{z^7+1}{z^5+z^3} = z^2 - 1 - \frac{1}{z} + \frac{1}{z^3} + \frac{z+1}{z^2+1} \quad (19)$$

■

Aufgabe 8

Die Lösungsidee ist die linke Seite als rationale Funktion $F(z) = \frac{f(z)}{g(z)} = \frac{n!}{z(z+1)(z+2)\dots(z+n)}$ zu betrachten und eine Partialbruchzerlegung anzuwenden.

Dann ist der Ansatz offensichtlich

$$\frac{n!}{z(z+1)(z+2)\cdots(z+n)} = \frac{a_1}{z} + \frac{a_2}{z+1} + \dots + \frac{a_{n+1}}{z+n} \quad (20)$$

mit $a_i \in \mathbb{C} \forall i \in \{1, \dots, n+1\}$. Multipliziert man nun die rechte Seite mit dem Nenner der linken Seite erhält man

$$\begin{aligned} n! &= (a_1(z+1)\cdots(z+n)) \\ &+ \dots \\ &+ (a_i z(z+1)\cdots(z+i-2)(z+i)\cdots(z+n)) \\ &+ \dots \\ &+ (a_{n+1} z(z+1)\cdots(z+n-1)) \end{aligned}$$

Setzt man nun in die rechte Seite die i -te Nullstelle von g ein (z.B. ist $z=0$ die erste Nullstelle, $z=-1$ die zweite, etc.) fallen alle Summanden bis auf den i -ten weg und man erhält die Gleichung

$$n! = a_i (-1)^{i-1} (i-1)! (n-(i-1))! \iff a_i = (-1)^{i-1} \binom{n}{i-1} \quad (21)$$

Macht man dies sukzessive für alle Nullstellen von g erhält man alle a_i und damit

$$\frac{n!}{z(z+1)(z+2)\cdots(z+n)} = \sum_{k=1}^{n+1} (-1)^{k-1} \binom{n}{k-1} \frac{1}{z+(k-1)} \quad (22)$$

und nach Indexshift der Summe die Behauptung. ■

Aufgabe 9

(a). Aus der Bedingung $P(z_k) = w_k$ folgt, dass

$$\begin{aligned} P(z_0) &= c_0 + c_1(z_0 - z_0) + c_2(z_0 - z_0) \cdot (z_0 - z_1) + \dots + c_n(z_0 - z_0)(z_0 - z_1)\cdots(z_0 - z_{n-1}) \\ &= c_0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P(z_1) &= c_0 + c_1(z_1 - z_0) + c_2(z_1 - z_0) \cdot (z_1 - z_1) + \dots + c_n(z_1 - z_0)(z_1 - z_1)\cdots(z_1 - z_{n-1}) \\ &= c_0 + c_1(z_1 - z_0) \end{aligned}$$

$\vdots$

$$P(z_n) = c_0 + c_1(z_n - z_0) + c_2(z_n - z_0) \cdot (z_n - z_1) + \dots + c_n(z_n - z_0)(z_n - z_1)\cdots(z_n - z_{n-1})$$

und damit nach rekursiver Auflösung, dass

$$\begin{aligned} c_0 &= w_0 \\ c_1 &= \frac{w_1 - w_0}{z_1 - z_0} \\ &\vdots \end{aligned}$$

Die Gleichungen für $P(z_i) = w_i$ mit $i \in \{0, \dots, n\}$ können auch mit Hilfe von Matrizen geschrieben werden als

$$\begin{pmatrix} P(z_0) \\ \vdots \\ P(z_n) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_0 \\ c_0 + c_1(z_1 - z_0) \\ \vdots \\ c_0 + \dots + c_n(z_n - z_0)\cdots(z_n - z_{n-1}) \end{pmatrix} = \mathbf{P}\mathbf{c} = \begin{pmatrix} w_0 \\ \vdots \\ w_n \end{pmatrix}$$

mit

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & (z_1 - z_0) & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & (z_1 - z_0) & \dots & (z_n - z_0)(z_n - z_1) \cdots (z_n - z_{n-1}) \end{pmatrix}$$

und

$$\mathbf{c} = \begin{pmatrix} c_0 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix}$$

Die Diagonale von $\mathbf{P}$ ist nirgendwo null da $z_0, \dots, z_n$ nach Voraussetzung paarweise verschieden sind. Damit ist $\mathbf{P}$ als obere Dreiecksmatrix invertierbar. Das beweist, dass $\mathbf{c}$ existieren und eindeutig sind. ■

(b). Die Darstellung erhält man sofort aus einer entsprechenden Rechnung da für das k -te Newton'sche Basispolynom gilt

$$(z-0)(z-1)\cdots(z-k+1) = z(z-1)\cdots(z-k+1) = \frac{z!}{(z-k)!} = \frac{z!}{(z-k)!} \frac{k!}{k!} = \binom{z}{k} k!$$

■

Aufgabe 10

(a). Für $\mathbb{Z} \ni z \leq k$ ist das Polynom trivialerweise ganzzwertig. Für $z > k$ beschreibt $\binom{z}{k}$ gerade die Anzahl der k -elementigen Teilmengen in einer Menge von z -Elementen. Diese Anzahl ist natürlich ganz.

(b). “ $\Leftarrow$ ” : Da die $\binom{z}{k}$ nach Teil (a) ganzzwertig sind und die b_k für $k = 0, \dots, n$ nach Voraussetzung ebenfalls, ist $P(z)$ mit einer Darstellung wie in Aufgabe 9b) ganzzwertig.

“ $\Rightarrow$ ” : Nehme jetzt ein ganzzwertiges Polynom P der bekannten Form an. Dann ist aufgrund der Ganzzwertigkeit auch $P(0)$ ganzzwertig. Aufgrund der Konstruktion des Polynoms muss dann aber die Ganzzwertigkeit von $b_0 = P(0)$ folgen. Die restlichen Koeffizienten können danach rekursiv bestimmt werden, denn wegen $\binom{n}{l} = 0$ für $l > n$ ist

$$P(l) = \sum_{k=0}^n b_k \binom{l}{k} = \sum_{k=0}^l b_k \binom{l}{k} = b_0 + b_1 \binom{n}{1} + \dots + b_l \binom{l}{l} \quad (23)$$

und daraus folgt nach Umstellung $b_l = P(l) - \sum_{k=0}^{l-1} b_k \binom{l}{k}$. Da aber $P(l)$ nach Voraussetzung und

$\sum_{k=0}^{l-1} b_k \binom{l}{k}$ (rekursiv) nach Konstruktion ganzzwertig sind, ist auch b_l ganzzwertig. ■

Jedes Polynom mit ganzzahligen Koeffizienten ist ganzzwertig. Umgekehrt gibt es aber auch Polynome, die ganzzwertig sind, *ohne* dass die Koeffizienten ganzzahlig sind, z.B. $P(x) = \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}x$. Die Darstellung der ganzzwertigen Polynome oben hat z.B. eine verwandte Anwendung der Darstellung von H_n , d.h. der n -ten harmonischen Zahl.

Aufgabe 11

Dies folgt aus der Darstellung der Möbiustransformation T als Komposition linearer Abbildungen und der Inversion, $T = L_2 \circ I \circ L_1$, p. 30. Die linearen Abbildungen sind klarerweise kreistreu, da

beispielsweise für $z := mw + n$ und Aufgabe 8 aus Kapitel 3 folgt, dass

$$\begin{aligned} a|z|^2 + z\bar{b} + \bar{z}b + c &= a(mz + n)(\bar{m}\bar{z} + \bar{n}) + (mz + n)\bar{b} + b(\bar{m}\bar{z} + \bar{n}) + c \\ &= a_2|z|^2 + z\bar{b}_2 + b_2\bar{z} + c_2 \\ &= 0 \end{aligned}$$

für passende neue $a_2, b_2, c_2 \in \mathbb{C}$. Dass die Inversion kreistreu ist, wurde bereits in Aufgabe 9 aus Kapitel 3 gezeigt. Also ist auch die Komposition der Abbildungen kreistreu und damit auch die Möbiustransformation. ■

Aufgabe 12

Der Beweis hat vier Bestandteile :

1. Jedes Polynom kann mit den n -Tupeln seiner Koeffizienten identifiziert werden. Da die Koeffizienten gemäß Voraussetzung Elemente von $\mathbb{Z}$ sind und $\mathbb{Z}$ abzählbar ist, ist auch das kartesische Produkt $\mathbb{Z}^n = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \times \dots \times \mathbb{Z}$ abzählbar.^a Also gibt es abzählbare viele Polynome von Grad n mit ganzzahligen Koeffizienten, für alle $n \geq 1$. Wenn man über alle $n \geq 1$ abzählt, dann ist also auch die abzählbare Vereinigung dieser abzählbar vielen Polynome wieder abzählbar.
2. Jedes Polynom (das mit den n -Tupeln seiner Koeffizienten identifiziert wird) hat gemäß des Fundamentalsatzes der Algebra höchstens n paarweise verschiedene Nullstellen. Die Menge der Nullstellen des Polynoms (d.h. der *algebraischen Zahlen* des Polynoms) ist also für jedes der betrachteten Polynome endlich und damit insbesondere abzählbar.
3. Die Menge aller algebraischen Zahlen ist damit die abzählbare Vereinigung aller Nullstellenmengen der abzählbaren Vereinigung aller Polynome mit Grad $n \geq 1$ und ganzzahligen Koeffizienten. Da dies aufgrund von 1. und 2. eine abzählbare Vereinigung abzählbarer^b Mengen, ist die Menge also selbst wieder abzählbar.
4. Die Menge aller transzendenten Zahlen kann nicht abzählbar sein, da ansonsten die Menge aller komplexen Zahlen als Vereinigung zweier abzählbarer Mengen (algebraisch und transzendent) wieder abzählbar wäre. Widerspruch. ■

^a. Das folgt mittels Induktion aus der Tatsache, dass das kartesische Produkt zweier abzählbarer Mengen wieder abzählbar ist. Letzteres wiederum folgt aus der Tatsache, dass es eine Injektion $i : \mathbb{N}^2 \rightarrow \mathbb{N}$ gibt.

^b. Aufgrund der Abzählbarkeit der $\mathbb{Z}$